ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE ×7I×

SUJET OPTION P'

Concours d'Admission 1977

(Trois pages dactylographiées)

MATHEMATIQUES I

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée X sur le corps $\mathbb{R}$.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$Q_n(X) = X(X+1)(X+2)\ldots(X+n-1) = \prod_{j=0}^{n-1} (X+j), \text{ pour } n \geq 1,$$

et par $Q_0(X) = 1$.

On notera $s(n,k)$ le coefficient de X^k dans $Q_n(X)$, étant entendu que $s(n,k) = 0$ si $n < k$. Par exemple, les égalités $Q_1(X) = X$, $Q_2(X) = X(X+1) = X + X^2$, $Q_3(X) = X(X+1)(X+2) = 2X + 3X^2 + X^3$ fournissent pour $s(n,k)$ les valeurs suivantes que l'on a portées dans une table à double entrée :

n \ k	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	2	3	1

Le coefficient binomial $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ pourra être noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.

1- *a) Que valent, pour $n \geq 1$, les coefficients $s(n,0)$, $s(n,1)$ et $s(n,n)$?*

b) A quoi sont égales, pour $n \geq 1$, la somme des coefficients $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)$ et la somme alternée $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k s(n,k)$?

c) Démontrer la relation de récurrence suivante :

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) + n.s(n,k), \qquad k \geq 1,\ n \geq 1$$

et compléter, jusqu'à la ligne $n = 5$ inclusivement, la table numérique donnée plus haut pour $n \leq 3$.

d) Soit f une application indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application $F = f \circ Log$, telle que $F(x) = f(Log\ x)$, est donc une application indéfiniment dérivable de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la dérivée $n^{ème}$ de F est donnée par :

$$F^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(x) \cdot f^{(k)}(Log\ x),$$

et exprimer très simplement les $A_{n,k}(x)$ à l'aide des coefficients $s(n,k)$.

2- *a) Montrer que*

$$s(n+1, 2) = n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

b) Calculer $s(n, n-1)$.

c) Calculer $s(n, n-2)$.

d) Plus généralement, $a \in \mathbb{N}$ étant donné, montrer que $s(n,n-a)$ s'exprime sous la forme d'un polynôme de degré $2a$ en n (qu'on n'essaiera pas de déterminer explicitement).

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par P_n le polynôme $\frac{1}{n!} Q_n$.

a) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une base de $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire que tout polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$, de degré m, s'écrit de manière unique $A = \sum_{l=0}^{m} \lambda_l P_l$.

b) Soit G l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme A associe le polynôme B tel que $B(X) = A(X-1)$, et soit ∇ l'endomorphisme qui, à A associe le polynôme C tel que $C(X) = A(X) - A(X-1)$. En désignant par I l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}[X]$, on a évidemment $\nabla = I - G$. Montrer alors que, pour tout polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\nabla^k (A)(X) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} A(X-j)$$

(On rappelle la convention : $\nabla^0 = I$) .

c) Démontrer que, pour tous entiers k et l, tels que $0 \leq k \leq l$, on a :

$$\nabla^k (P_l) = P_{l-k}$$

d) En déduire que , pour tout entier l compris entre 0 et le degré de A, la coordonnée λ_l de $A \in \mathbb{R}[X]$ dans la base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est autre que la valeur du polynôme $\nabla^l(A)$ au point 0 : $\lambda_l = \nabla^l(A)(0)$.

e) Calculer explicitement les coordonnées λ_l dans le cas où $A(X) = X^m$, $m \in \mathbb{N}$.

f) Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes $A \in \mathbb{R}[X]$ "à valeurs entières sur les entiers", en ce sens que : $(u \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow (A(u) \in \mathbb{Z})$. Par exemple, $B(X) = X^2 \in \mathcal{E}$, mais $C(X) = X^2/2 \notin \mathcal{E}$, car $C(1) = 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Montrer que tout polynôme P_n appartient à $\mathcal{E}$.

g) Prouver que l'ensemble $\mathcal{E}$ se compose exactement de tous les polynômes dont toutes les coordonnées dans la base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des entiers.

(4) Soit f la fonction des deux variables réelles x et y telle que

$$f(x,y) = (1-x)^{-y}.$$

a) Montrer très brièvement que, pour tout $x \in]-1,1[$, et tout $y \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(y)\, x^n,$$

où $a_n(y)$ est la valeur au point y d'un polynôme qui s'exprime très simplement en fonction des polynômes Q_l.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a l'égalité suivante entre polynômes à deux indéterminées sur $\mathbb{R}$:

$$Q_n(Y+Z) = \sum_{k=0}^{n} R_k(Y)\, Q_k(Z),$$

où les polynômes R_k s'expriment très simplement en fonction des polynômes Q_l.

c) Les entiers naturels l et k étant donnés, montrer qu'il existe des coefficients μ_j , que l'on déterminera, tels que

$$Q_k(Y).\, Q_l(Y) = \sum_{j=0}^{k+l} \mu_j\, Q_j(Y) .$$

(On pourra envisager le produit $(1-x)^{-y}\ (1-t)^{-y}$).

d) Démontrer, pour $|x|$ suffisamment petit, la validité du développement en série entière suivant :

$$\frac{1}{k!}(-\mathrm{Log}(1-x))^k = \sum_{n=k}^{+\infty} s(n,k)\, \frac{x^n}{n!}$$

5- *On constate, sur la table construite lors de la question 1 (c), que chaque ligne est constituée d'une suite d'entiers d'abord croissante, et décroissante ensuite. Plus précisément, on se propose maintenant de prouver que la suite* $(v_k) = (s(n,k))$, n *fixé,* $n \geq 3$, *est telle qu'il existe un entier* $k_0 = k_0(n)$ *pour lequel :*

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_{k_0-1} < v_{k_0} \geq v_{k_0+1} > v_{k_0+2} > \ldots > v_n .$$

En abrégé, la suite est dite "unimodale".

a) *Soit* $V(X,Y)$ *un polynôme homogène de degré* m, *qui est produit de* m *facteurs du premier degré, à coefficients réels :*

$$V(X,Y) = \prod_{k=1}^{m} (a_k X + b_k Y).$$

Montrer que le polynôme dérivée partielle $\frac{\partial V}{\partial X}$ *jouit aussi de cette propriété de factorisation, ainsi que n'importe quelle autre dérivée partielle* $\frac{\partial^{p+q} V}{\partial X^p . \partial Y^q}$

b) *En appliquant cette propriété, au besoin admise, à la dérivée partielle*

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial X^{k-1} . \partial Y^{n-k-1}} X(X+Y)(X+2Y)\ldots(X+(n-1)Y),$$

montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, *on a :*

$$s(n, k-1) \cdot s(n, k+1) < \{s(n,k)\}^2$$

c) *En déduire l'unimodalité de* $(v_k) = (s(n,k))$.

6- *On considère maintenant, pour* k *fixé,* $k \geq 2$, *la série de fonctions de terme général* $(Q_k(x+n))^{-1}$, *et l'on appelle* $\Psi_k(x)$ *sa somme quand cette dernière existe. Donc*

$$\Psi_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{Q_k(x+n)} = \frac{1}{x(x+1)..(x+k-1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)} + \ldots .$$

a) *Montrer que la série converge pour tout réel* x, *tel que* $-x \notin \mathbb{N}$.

b) *Calculer* $\Psi_2(x)$ *et* $\Psi_3(x)$ *sous forme très simple.*

c) *Plus généralement exprimer* $\Psi_k(x)$ *au moyen des* $Q_j(x)$.

d) *Soit* R *un polynôme de degré au plus égal à* $k-2$. *Imaginer un procédé pour obtenir la somme* $g(x)$ *de la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R(x+n)}{Q_k(x+n)}$$

e) *Illustrer le procédé précédent en calculant la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u(x+n)$, *où* $u(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

°°°°°°°°°°°

°°°°°°°

°

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail